Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. с. Озерці
Горохівського району Волинської області

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ВІЄТА ТА ТЕОРЕМИ, ОБЕРНЕНОЇ ДО ТЕОРЕМИ ВІЄТА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Озерці 2013

Кальчевська Зоя Миколаївна у 1990 році закінчила фізико-математичний факультет Луцького державного педагогічного інституту ім. Лесі Українки за спеціальністю «Математика і фізика».

З 2003 року працює учителем математики загальноосвітньої школи І-ІІІ ст. с. Озерці. Спеціаліст першої категорії. Стаж роботи - 22 роки.

В навчальному посібнку наводяться приклади розв'язування різних видів рівнянь (квадратних, біквадратних, рівнянь третього степеня, ірраціональних), вправ на арифметичну прогресію, геометричні задачі. Серед наведених прикладів є як традиційні, на безпосереднє застосування теореми Вієта, так і нестандартні, які сприяють розширенню кругозору, підвищенню рівня логічного мислення, творчої уяви, формуванню навичок дослідницької діяльності учнів.

Рецензенти: Гамалійчук Н.Р. – керівник методичного об'єднання вчителів математики округу.
Дядюк Р.І. – директор загальноосвітньої школи І-ІІІ ст. с. Озерці.

Схвалено на засіданні методичної ради, протокол №4 від 19.02.2013 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Проблема формування творчого мислення школярів надзвичайно актуальна. Виявити школярів, які цікавляться і схильні до занять математикою, краще підготувати старшокласників до вступної кампанії допомагають математичні олімпіади, факультативні заняття, гурткова робота. Практика показує, що рівень математичної освіти школярів має велике значення і вимагає систематичної, цілеспрямованої роботи гуртків, факультативів, індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою. На заняттях гуртка або факультативу необхідно звертати увагу на питання, вивчення яких поглиблює програмні знання, сприяє оволодінню методами розв'язування задач, рівнянь, систем тощо.

Хто з учителів математики не мріяв , щоб його учні вміли швидко знаходити корені квадратного рівняння? Таке вміння особливо важливе для учнів 10-11-х класів, де квадратні рівняння утворюються при розв'язуванні тригонометричних, логарифмічних, показникових рівнянь тощо.

Вивчаючи теорему Вієта, здавалося що її можна застосовувати лише при розв'язуванні квадратних рівнянь. Цікавим і захоплюючим є використання цієї теореми у задачах на теми далекі від розділу "Квадратні рівняння". В курсі математики 8-9-х класів її можна використовувати при розв'язуванні задач у розділах : "Квадратні корені" , "Нерівності і системи рівнянь другого степеня" , "Арифметична прогресія", у геометричних задачах тощо.

Застосування цієї теореми робить розв'язання простим , оригінальним , незвичайним , нетрадиційним, цікавим.

Франсуа Вієт пишався усім тепер відомою теоремою про залежність між коренями квадратного рівняння та його коефіцієнтами, яку він отримав самостійно, хоча, як тепер відомо, залежність між коефіцієнтами і коренями рівняння (навіть загальнішого вигляду, ніж квадратне) була відома ще Кардано, а в такому вигляді, як ми застосовуємо її для квадратного рівняння - давнім вавилонянинам. Теорему було оприлюднено 1591 року. Її названо ім'ям Вієта, а сам автор формулював її так: «Якщо B+D, помножене на A, мінус A в квадраті дорівнює BD, то A дорівнює B і дорівнює D». Теорема Вієта стала зараз найвідомішим твердженням шкільної алгебри. Теорема Вієта варта уваги тим, що її можна узагальнити для многочленів будь–якого степеня.

Така проста теорема Вієта корисна не тільки для зведених квадратних рівнянь, а й може допомогти у розв'язуванні більш складних рівнянь та систем.

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь простий: число або вираз розкласти на два спільних співмножники так, щоб їх сума дорівнювала іншому заданому числу. А якщо таких чисел не знайдемо, то можна перевірити дискримінант і уточнити наявність коренів, і іншого методу розв'язування можливо шукати не потрібно.

Виявляється, алгоритмом можна скористатися і тоді, коли числа дробові або ірраціональні.

Теорема знайшла застосування в спрощенні ірраціональних виразів, розв'язуванні нерівностей, доведеннях, розв'язуванні систем рівнянь тощо.

1.ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ВІЄТА ТА ТЕОРЕМИ ОБЕРНЕНОЇ ДО ТЕОРЕМИ ВІЄТА:

Теорема. *Якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком а добуток - вільному члену.*

Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1, x_2 ,то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \times x_2 = q$.

Теорема (*обернена до теореми Вієта)*

Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно –p і q , то m і n – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

1.1. Розв'язування квадратних рівнянь із цілими коренями.

З теореми Вієта випливає , що цілі розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$ є дільниками числа q. Користуючись оберненою теоремою, можна перевіряти, чи є та чи інша пара чисел коренями зведеного квадратного рівняння, чи ні. Це дає можливість усно розв'язувати багато таких рівнянь.

Приклад 1. Підібрати корені рівняння $x^2 – 10x – 24 = 0$.

Розв'язання:

$a = 1$, $c = -24$, тому $ac < 0$. Отже, дане рівняння має корені .За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 10$, $x_1x_2 = -24$. Таким чином $x_1 = 12$, $x_2 = -2$.

Відповідь. *-2; 12.*

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 + 17x + 30 = 0$.

Розв'язання:

$a = 1$, $c = 30$, тому $ac > 0$. Отже, дане рівняння не має коренів.

Відповідь. Коренів не має.

Приклад 3. Один із коренів квадратного рівняння

$x^2 + kx + 18 = 0$ дорівнює -3. Знайти коефіцієнт k та другий корінь рівняння.

Розв'язання:

$x^2 + kx + 18 = 0.$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} -3 + x_2 = -k, \\ -3x_2 = 18, \end{cases}$ $\begin{cases} -3 + (-6) = -k, \\ x_2 = -6, \end{cases}$

$\begin{cases} k = 9, \\ x_2 = -6. \end{cases}$

Відповідь. $x_2 = -6$, $k = 9$.

Приклад 4. Записати квадратне рівняння, корені якого дорівнюють *12 і -8*.

Розв'язання: за теоремою Вієта $12 + (-8) = -p$, $12 \times (-8) = q$. Звідси $p = -4$, $q = -96$.

Отже, шукане рівняння $x^2 - 4x - 96 = 0$.

1.2. Розв'язування квадратних рівнянь з дробовими коренями

Школярі без особливих труднощів добором знаходять цілі корені квадратних рівнянь, використовуючи теорему , обернену до теореми Вієта. Якщо ж рівняння має дробові корені , то не кожний учень відразу може дібрати такі два числа , сума яких дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток $\frac{c}{a}$.

Для подолання цієї проблеми можна використати відомий прийом, що дає змогу звести задачу до знаходження цілих коренів допоміжного рівняння.

Нехай потрібно розв'язати квадратне рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$.

<u>1-*й спосі*</u>

Помножимо обидві частини рівняння на a , перепишемо його у вигляді $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$. Підставивши $y = ax, y^2 = (ax)^2$, одержимо $y^2 + by + ac = 0$, де $y_1 + y_2 = -b$, тобто $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2)a, y_1 y_2 = ac,$ тобто $y_1 y_2 = (x_1 x_2)a^2$.

Отже , щоб розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, досить розв'язати рівняння $y^2 + by + ac = 0$ та його корені поділити на *a*.

Для практичного застосування цього способу можна сформулювати його як інструкцію:

“перекинути” коефіцієнт a до вільного члена, знайти корені нового рівняння та поділити їх на a.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $2x^2 – 7x + 3 = 0$.

Розв’язання: щоб знайти корені, розкладемо на два співмножники не вільний член 3, а добуток першого коефіцієнта 2 на вільний член 3, тобто число 6, так щоб сума дорівнювала числу 7 (коефіцієнту при х, взятому зі знаком мінус).

$6 = 6 \times 1$ *і* $6 + 1 = 7$

Знайдені числа 6 *і* 1 ділимо на коефіцієнт при x^2 і дістаємо $\frac{6}{2} = 3$ *і* $\frac{1}{2}$ - корені рівняння.

Відповідь. $1/2$; 3.

Приклад 6. Розв’язати рівняння $36x^4 – 13x^2 + 1 = 0$.

Розв’язання: добуток 36×1 розкладаємо на шукані співмножники 4 *і* 9, їх сума $4 + 9 = 13$. Отже, числа $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ і $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ - це корені рівняння $36y^2 – 13y + 1 = 0$, де $y = x^2$. Числа $\pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$ і $\pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$ - корені рівняння $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$.

Відповідь. – 1/3; -1/2; 1/3; 1/2.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $6x^2 + x - 15 = 0$.

Розв'язання: $6x^2 + x - 15 = 0;$

$$y^2 + y - 90 = 0;$$

$$y_1 = -10\ ,\ y_2 = 9;$$

$$x_1 = -10/6 = -5/3\ ,\ x_2 = 9/6 = 3/2.$$

Відповідь.*-5/3; 3/2.*

Приклад 8. Розв'язати рівняння $12x^2 + 13x + 3 = 0$.

Розв'язання: $12x^2 + 13x + 3 = 0;$

$$y^2 + 13y + 36 = 0;$$

$$y_1 = -4\ ,\ y_2 = -9,$$

$$x_1 = -1/3,\ x_2 = -3/4.$$

Відповідь.*-1/3; -3/4.*

2-й спосіб

Якщо добуток *ас* подати у вигляді добутку множників *т* і *–в-т (* їхня сума дорівнює -*в* , то

$$x_1 = \frac{m}{a}, x_2 = \frac{-b-m}{a}.$$

Справді ,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, x_1 x_2 = \frac{m(-b-m)}{a^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a}.$$

Ця властивість дає можливість усно розв'язувати деякі квадратні рівняння.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $18x^2 - 25x - 3 = 0$.

Розв'язання: $18x^2 - 25x - 3 = 0;$

$18(-3) = -2\times27$, де $m = -2$,

$-в-m=-(-25)-(-2) = 27,$

$$x_1 = \frac{m}{a}, x_2 = \frac{-b-m}{a},$$

$x_1 = -2/18 = -1/9$, $x_2 =27/18 = 3/2.$

Відповідь.$-1/9$; $3/2$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $7x^2 + 12x + 5 = 0$.

Розв'язання: $7x^2 + 12x + 5 = 0;$

$7\times5 = (-7)\times(-5);$

де $m = -7$, $-в-m = -5,$

x_1 = *-7/7* = *-1* , x_2 = *-5/7*.

Відповідь.*-1; -5/7.*

1. 3.Розв'язування кубічних рівнянь.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

Формулу для його розв'язування ми не знаємо. Але якби ми знали корені цього рівнянн , то змогли б записати його у вигляді

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 .$$

І навпаки, якби вихідне рівняння ми змогли б розкласти на множники, то визначили б його корені. Розкриємо дужки і отримаємо рівняння

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 .$$

Тепер ми маємо можливість записати таку систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases}$$

Приклад 11. Знайти суму і добуток усіх коренів кубічного рівняння.

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 11 = 0$$

Розв'язання: $x_1 + x_2 + x_3 = -3,$

$x_1x_2x_3 = 11.$

Відповідь. 11.

Приклад 12. Три числа x_1,x_2,x_3 є коренями рівняння $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$ Скласти кубічне рівняння з коренями $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3.$

Розв'язання: за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2,$ $x_1x_2x_3 = -1.$

Тоді $t_1 = x_1x_2,$ $t_2 = x_1x_3,$ $t_3 = x_2x_3$ і

$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = x_1{}^2x_2x_3 + x_1x_2{}^2x_3 + x_1x_2x_3{}^2 =$
$x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -1 \cdot 1 = -1.$

$t_1 + t_2 + t_3 = 2.$

$t_1t_2t_3 = x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 = 1$

Тому за теоремою Вієта t_1, t_2, t_3 є коренями рівняння

$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0.$

Приклад13. Коренями многочлена

$x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ є числа x_1, x_2, x_3.

Скласти кубічне рівняння з коренями $3x_1, 3x_2, 3x_3$.

Розв’язання: за теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2$$

Тоді $t_1 = 3x_1,\ t_2 = 3x_2,\ t_3 = 3x_3$

Отже, $t_1 + t_2 + t_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) = 3(-3) = -9$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 9x_1x_2 + 9x_1x_3 + 9x_2x_3 = 9(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 \cdot$$

$$t_1t_2t_3 = 27x_1x_2x_3 = 27 \cdot 2 = 54$$

Числа t_1, t_2, t_3 є коренями рівняння

$x^3 + 9x^2 + 18x - 54 = 0$

Приклад 14. Коренями рівняння $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$

є числа x_1, x_2, x_3. Скласти кубічне рівняння з коренями $x_1^{\ 2}, x_2^{\ 2}, x_3^{\ 2}$.

Розв'язання: за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4,$$
$$x_1x_2x_3 = 1$$

Тоді $t_1 = x_1^{\ 2}$, $t_2 = x_2^{\ 2}$, $t_3 = x_3^{\ 2}$

$$t_1 + t_2 + t_3 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$
$$= 1^2 - 2 \cdot 4 = -7,$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = x_1^{\ 2}x_2^{\ 2} + x_1^{\ 2}x_3^{\ 2} + x_2^{\ 2}x_3^{\ 2} = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 +$$
$$(x_2x_3)^2 == (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2(x_1^{\ 2}x_2x_3 + x_1x_2^{\ 2}x_3 + x_1x_2x_3^{\ 2}) =$$
$$4^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) == 16 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 14,$$
$$t_1t_2t_3 = x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}x_3^{\ 2} = (x_1x_2x_3)^2 = 1^2 = 1$$

Числа t_1, t_2, t_3 є коренями рівняння $x^3 + 7x^2 + 14x - 1 = 0$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0.$

Розв'язання: за теоремою Вієта маємо, що якщо корені цього рівняння цілі числа , то вони повинні належати множині $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Але перевіряти це, послідовно підставляючи вісім чисел – громіздка задача.

Тому спробуємо використати розкладання на множники способом групування.

$x^3 + 2x^2 - 5x – 6 = x^3 + (3x^2 - x^2) - 3x - 2x – 6 =$

$x^2(x + 3) - x(x + 3)-2(x + 3) = (x + 3)(x^2 – x – 2) =$

$(x + 3)(x^2 + x - 2x - 2) = (x + 3)(x(x + 1) - 2(x + 1)) =$

$(x + 3)(x + +1)(x - 2).$

Отже , вихідне рівняння рівносильне такому:

$$(x + 3)(x + 1)(x - 2) = 0.$$

А в цього рівняння три корені : $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2.$

Що було найважчим в цьому способі розв’язування? Звичайно, здогадатися, що потрібно подати $2x^2$ у вигляді різниці $3x^2$-x^2.

Але якщо скористатися теоремою Вієта , то можна помітити “підказку” :

потрібно , щоб при створенні груп для розкладання на множники з’явились числа – дільники вільного члена. Хоча цей метод не можна застосувати до всіх рівнянь такого типу, бо корені рівняння можуть і не бути цілими числами. Тоді такі рівняння розв’язуються іншими методами.

1.4.Розв'язування біквадратних рівнянь.

Розв'яжемо тепер рівняння виду $ax^4+вx+c=0$, де $a\neq 0$, *в, с* – дані числа , яке називають біквадратним рівнянням.

Підстановкою $x^2=y$ кожне з таких рівнянь можна звести до квадратного рівняння

$$ay^2+вy+c=0.$$

Приклад 16. Розв'язати рівняння $4x^4 – 5x^2 + 1 = 0$.

Розв'язання : $4x^4 – 5x^2 + 1 = 0;$

$$x^2 = y;$$

$$4y^2 - 5y + 1 = 0;$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0;$$

$$z_1 = 4, z_2 = 1,$$

$$y_1 = \frac{4}{4} = 1, y_2 = \frac{1}{4},$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь.*-1; -1/2; 1/2; 1.*

Приклад 17 . Розв'язати рівняння $6y^4 - 8y^2 + 1 = 0$.

Розв'язання : $6y^4 - 8y^2 + 1 = 0;$

$y^2=z;$

$16z^2 - 8z + 1 = 0;$

$t^2 - 8t + 16 = 0;$

$t_1 = t_2 = 4,$

$z_1 = z_2 = 4/16,$

$y^2 = 1/4,$

$y_1 = -1/2, y_2 = 1/2.$

Відповідь. *–1/2; 1/2.*

1.5.Розв'язування рівнянь *n*-го степеня

Для рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ за теоремою Вієта якщо $x_1, x_2, \ldots x_n$ – його корені корені і f_1 дорівнює сумі всіх коренів, f_2 – сумі добутків коренів, взятих по три, f_3 є сума добутків коренів рівняння, взятих по три, $f_4, f_5, \ldots f_n$ задані аналогічно, так що f_n є добуток $x_1x_2\ldots x_n$, то

$$f_1 = -\frac{a_1}{a_0},\ f_2 = \frac{a_2}{a_0},\ f_3 = \frac{a_3}{a_0},\ \ldots,\ f_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Приклад 18. Розв'язати рівняння $(7\text{-}8)x^{1987} – 1987x^{1986}$ $+ \ ... \ - 1 = 0$, якщо відомо, що всі 1987 коренів цього рівняння – цілі числа.

Розв'язання: дане рівняння легко розв'язується за допомогою теореми Вієта для рівнянь n– го степеня:

$$x_1x_2 \ ... \ x_{1987} = 1,$$

$$x_1 + x_2 + \ ... \ + x_{1987} = 1987.$$

Звідси і з умови, що $x_1, x_2, \ ... \ x_{1987}$ – цілі числа, випливає

$$x_1 = x_2 = \ ... \ x_{1987} = 1.$$

Відповідь. $x_1 = x_2 = \ ... \ x_{1987} = 1.$

1.6.Розв'язуванні нерівностей другого степеня з одним невідомим.

Теорема Вієта використовується при розв'язуванні нерівностей другого степеня з одним невідомим

$ax^2+вx+c>0 \ ,a\neq \ 0$, які можна звести до виду

$x^2+px+q>0,($ якщо $a>0)$ (1)

або

$x^2+px+c<0,($ якщо $a<0),$ (2)

де $p=b/a \ , \ q=c/a.$

Якщо дискримінант квадратного тричлена x^2+px+q більший за нуль , то цей квадратний тричлен можна розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 - корені тричлена , які розбивають числову вісь на три проміжки знакосталості тричлена x^2+px+q. Нехай для визначеності $x_1 < x_2$.

Проаналізуємо знак тричлена на кожному з зазначених проміжків.

Якщо $x< x_1$, то обидва множники від'ємні: $(x- x_1)<0$ і $(x- x_2)<0$; тоді $x^2+px+q>0$.

Якщо $x_1<x<x_2$, то перший множник буде додатним , а другий - від'ємним : $(x-x_1)>0$, а $(x-x_2)<0$; тоді $x^2+px+q<0$.

Якщо $x>x_2$, то обидва множники додатні: $(x-x_1)>0$ і $(x-x_2)>0$; тоді $x^2+px+q>0$.

Отже,

1. Якщо D>0, то квадратний тричлен x^2+px+q додатний при значеннях x, менших за менший

корінь і більших за більший корінь, і від’ємний при значеннях x, які знаходяться між його коренями.

2. Якщо D=0, то квадратний тричлен x^2+px+q дорівнює нулю при $x=-p/2$ і є додатним при всіх інших значеннях x.
3. Якщо D<0 , то тричлен x^2+px+q додатний при всіх значеннях x.

Тому, щоб розв’язати зведені квадратні нерівності (1) або (2) у випадку, коли D>0, знаходимо корені квадратного тричлена x^2+px+q, наносимо їх на числову вісь і розв’язуємо за методом інтервалів. Як розв’язок вибираємо потрібні проміжки.

Якщо D< , то квадратний тричлен не розкладається на множники, і нерівність (2) не має розв’язків, а нерівність (1) справджується для всіх дійсних значень x.

Якщо D=0, то квадратний тричлен має один (двократний)корінь, і розв’язками нерівності (1) будуть усі дійсні числа, за винятком цього кореня , а нерівність (2) не має розв'язків .

Нерівності виду $x^2 + px + q \geq 0; x^2 + px + q \leq 0$ розв'язуються аналогічно, лише до розв'язків цих нерівностей включаються дійсні корені тричлена x^2+px+q , якщо вони існують .

Приклад 19. Розв'язати нерівність $-2x^2 - 5x + 7 \leq 0.$

Розв'язання: $2x^2 + 5x - 7 \geq 0;$

$$y^2 + 5y - 14 \geq 0.$$

За теоремою Вієта $y_1 = 2, y_2 = -7$, тоді

$$x_1 = 2/2 = 1, x_2 = -7/2 = -3,5.$$

Відповідь. $(\infty;-3,5] \cup [1;\infty).$

Приклад 20. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 9 < 0.$

Розв'язання: $x_1 = x_2 = 3$

Відповідь. Розв'язків не має.

1.7.Розв'язування систем рівнянь.

Розглянемо, як можна застосувати теорему Вієта для розв'язування деяких систем рівнянь:

а) $\begin{cases} ax + by = m, \\ xy = n. \end{cases}$

Цю систему можна розв'язати , використавши метод підстановки. Але зручніше і раціональніше використати теорему, обернену до теореми Вієта. Такий спосіб полягає у тому, що значення x та y, які задовольняють систему, розглядаються як корені квадратного рівняння, складеного за твердженням, оберненим до теореми Вієта.

Приклад 21. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 10. \end{cases}$

Розв'язання: за теоремою, оберненою до теореми Вієта, значення x та y є коренями квадратного рівняння

$$t^2 - 3t - 10 = 0.$$

Тоді $t_1 = -2, t_2 = 5.$

Отже ,

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -2. \end{cases}$$

Відповідь. (-2; 5) , (5; -2).

Приклад 22. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18 \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18. \end{cases}$$

x і $(-y)$ – корені рівняння $z^2\text{-}7z\text{-}18=0$,

$z_1 = 9, z_2 = -2,$

$$\begin{cases} x = 9, \\ -y = -2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -2, \\ -y = 9, \end{cases}$$

тоді $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -2, \\ y = -9. \end{cases}$

Відповідь. (9;2) , (-2;-9).

Приклад 23. На огорожу для прямокутної ділянки площею 300 м^2 витратили 80 м дроту. Визначити розміри ділянки.

Розв'язання: нехай x ,y – шукані розміри ділянки. За умовою задачі складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(x + y) = 80, \\ xy = 300, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 40, \\ xy = 300. \end{cases}$$

Вважаємо, що значення x , y є коренями квадратного рівняння

t^2- 40t + 300 = 0.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта ,

$t_{11} = 10, t_2 = 30$ - його корені.

Отже ,

$\begin{cases} x = 10, \\ y = 30, \end{cases}$ або $\begin{cases} [= 30, \\ y = 10. \end{cases}$

Відповідь. 10 м , 30 м.

Розв’яжемо другу систему

б) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$

Перше рівняння піднесемо до квадрата і від нього віднімемо друге

$\begin{cases} (x + y)^2 = a, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases}$ $\begin{cases} 2xy = a^2 - b, \\ x + y = a, \end{cases}$ $\begin{cases} xy = \dfrac{a^2 - b}{2}, \\ x + y = a. \end{cases}$

Приклад 24. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 2y = 28, \\ x^2 + y^2 = 100, \end{cases}$

Розв’язання:

$$\begin{cases} 2(x+y)=28, \\ x^2+y^2=100, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=14, \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4, \\ y=5, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$$

Відповідь. (4;5) , (5;4).

Приклад 25. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144, \\ x^2+4x+5y=24, \end{cases}$$

Розв’язання:

$$\begin{cases} (x^2+x)(3x+5y)=144, \\ (x^2+x)+(3x+5y)=24. \end{cases}$$

Вважаємо, що значення x^2+x та $3x+5y$ є коренями квадратного рівняння

$$z^2-24z+144=0,$$

$$z_1=z_2=12,$$

Отже , $x^2+x=12,$

$$x^2+x-12=0$$
$$x_1=3, x_2=-4,$$

$$3x+5y=12,$$
$$5y=12-3x,$$
$$y=\frac{12-3x}{5},$$
$$y_1=\frac{12-9}{5}=\frac{3}{5},\ y_2=\frac{12+12}{5}=4\frac{4}{5}.$$

Тому $\begin{cases} x=3, \\ y=\dfrac{3}{5}, \end{cases}$ або $\begin{cases} x=-4, \\ y=4\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

Відповідь. $(3;\frac{3}{5}),(-4;4\frac{4}{5}).$

1.8.Спрощення виразів виду $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$.

Спростити вираз виду $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$.

Розв'язання: щоб спростити цей вираз , виконаємо таке перетворення $a\pm 2\sqrt{b}$:

$$\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=\left|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right|,$$

де $x,y-$ шукані додатні числа $(a=x+y, b=xy)$.

Коли радикал $\sqrt{a-2\sqrt{b}}$ можна подати як різницю $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, де $x>y>0$, то $a-2\sqrt{b}$ завжди буде додатним числом.

Приклад 26. Перетворити радикал в суму (різницю) двох простих

а) $\sqrt{13+2\sqrt{12}} = \sqrt{13+2\sqrt{12\cdot 1}} = \sqrt{(12+1)+2\sqrt{12\cdot 1}} =$
$\sqrt{\left(\sqrt{12}+\sqrt{1}\right)^2} = \sqrt{12}+\sqrt{1} = 2\sqrt{3}+1.$

б) $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-\sqrt{4\cdot 12}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{\left(4+3\right)-2\sqrt{4\cdot 3}} =$
$\sqrt{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}.$

Приклад 27. Розв’язати рівняння $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=1.$

Розв’язання:

$$\sqrt{x+5+2\sqrt{4(x+1)}}-\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=1;$$
$$\sqrt{\left(\left(x+1\right)+4\right)+2\sqrt{4(x+1)}}-\sqrt{\left(\left(x+1\right)+1\right)+2\sqrt{\left(x+1\right)\cdot 1}}=1;$$
$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1}\right)^2}=1;$$
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4}-\sqrt{x+1}-\sqrt{1}=1;$$
$$\sqrt{4}-\sqrt{1}=1;$$
$$2-1=1;$$
$$1=1.$$

Розв'язки рівняння всі дійсні значення x з проміжку $[-1;\infty)$, бо $\sqrt{x+1}$ має зміст при $x \geq -1$.

Приклад 28. Довести, що значення виразу $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ є раціональне число.

Доведення:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{9\times 2}} - \sqrt{11-2\sqrt{9\times 2}} = \sqrt{9+2+2\sqrt{9\times 2}} -$$

$$+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 6.$$

1.9. Розв'язування задач з теми "Арифметична прогресія ".

Покажемо, як використовується теорема Вієта при розв'язуванні задач з теми "Арифметична прогресія ".

Приклад 29. Сума десяти перших членів арифметичної прогресії дорівнює 140, а добуток a_2 на a_9 дорівнює 147. Знайти прогресію.

Розв'язання: сума n перших членів арифметичної прогресії

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n,$$

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_{10}) \cdot 5.$$

За умовою складаємо систему

$$\begin{cases} (a_1 + a_{10}) \cdot 5 = 140, \\ a_2 a_9 = 147, \end{cases}$$

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$$

Отже ,

$$\begin{cases} (a_2 + a_9) \cdot 5 = 140 \\ a_2 a_9 = 147, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 + a_9 = 28, \\ a_2 a_9 = 147. \end{cases}$$

За теоремою Вієта a_2, a_9 є коренями рівняння

$$x^2 - 28x + 147 = 0.$$

$$x_1 = 21, x_2 = 7.$$

Тому $a_2 = 21,\quad a_9 = 7$ або $a_2 = 7, a_9 = 21.$

Якщо $a_2 = 21, a_9 = 7,$ то

$$\begin{aligned} &a_9 = a_2 + 7d, \\ &7 = 21 + 7d, \\ &7d = 14, \\ &d = -2. \end{aligned}$$

Тоді $a_1 = 23, a_2 = 21, a_3 = 19, \ldots, a_9 = 7.$

Якщо $a_2 = 7, a_9 = 21$, то

$$a_9 = a_2 + 7d,$$
$$7d = 14,$$
$$d = 2.$$

Тоді $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, \ldots, a_9 = 21.$

Приклад 30. Три дійсних корені рівняння $x^3 - 6x^2 - qx + 10 = 0$ утворені арифметичною прогресією. Знайти q.

Розв’язання:

$x_1 + x_2 + x_3 = 6;$

$x_2 = x_1 + a;$

$x_3 = x_1 + 2a;$

$x_1 + x_1 + a + x_1 + 2a = 6;$

$3x_1 + 3a = 6;$

$3\,(x_1 + a) = 6;$

$x_1 + a = 2 = x_2;$

$x_1 x_2 x_3 = -10;$

$x_1 x_3 = -10/2 = -5;$

$-q = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3;$

$q = -x_2\,(x_1 + x_3);$

$q = -2 \times (6 - 2) = -8$

Відповідь. -8.

1.10. Розв'язування геометричних задач.

Теорему Вієта можна використовувати при розв'язуванні геометричних задач.

Приклад 31. Довжини катетів прямокутного трикутника є коренями рівняння $x^2 - 3x + 1 = 0$. Не розв'язуючи даного рівняння, знайти радіус r кола, вписаного в цей трикутник.

Розв'язання:

S – площа даного трикутника,

P – його периметр.

$$a = x_1, b = x_2, c = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}$$

Тоді

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}x_1 x_2, P = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}.$$

$$2S = x_1 x_2, 2S = 1.$$

$$P = x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} = 3 + \sqrt{3^2 - 2 \cdot 1} = 3 + \sqrt{9 - 2} = 3 + \sqrt{7}.$$

Використаємо формулу $r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{2S}{P}.$

$$r=\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{7}}{9-7}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

1.11. Формули Вієта для многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_n \neq 0)$.

Нехай многочлен n-го степеня $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_n \neq 0)$ має n різних коренів: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Цей добуток є многочленом того самого n-го степеня. Отже, у результаті ділення **можна** одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=b(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (1)$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (1) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що $b= a_n$, тобто

$$\boldsymbol{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Порівнюючи в тотожності (2) коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його кореням, які називаються **формулами Вієта:**

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}; \qquad (3)$$

…………………………………………

$$x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Наприклад, при n=2 маємо:

$$x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_2};$$

$$x_1x_2=\frac{a_0}{a_2},$$

а при n=3:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}; \qquad (4)$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}; \quad x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}.$$

Виконання таких рівностей є необхідною і достатньою умовою того, щоб числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ були коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \; (a_n \neq 0).$$

Формули (3), (4) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена $f(x)$ різні. Введемо поняття *кратного кореня многочлена.*

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $(x-x_1)^k$, але не ділиться без остачі на $(x-x_1)^{k+1}$, то говорять , що число x_1 є корінь кратності k многочлена $f(x)$. Наприклад, якщо добуток $(x+2)^3(x-1)^2(x-3)$ записати у вигляді многочлена, то для цього многочлена число (-2) є коренем кратності 3, число 1 є коренем кратності 2, а число (-3) є коренем кратності 1. При використанні формул Вієта у випадку кратних коренів необхідно кожен корінь записати стільки разів, яка його кратність.

Приклад 32. Перевірити справедливість формул Вієта для многочлена $f(x) = x^3+2x^2-4x-8$.

Розв'язання:

$f(x) = x^3+2x^2- 4x - 8=x^2(x+2) – 4(x+2)=(x+2)(x^2-4)=$
$=(x-2)(x+2)^2$.

Тому $f(x)$ має корені $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=-2$ (оскільки (-2) - корінь кратності 2).

Перевіримо справедливість формул (4).

У нашому випадку : $a_3=1, a_2=2, a_1=-4, a_0=-8$. Тоді

$2+(-2) +(-2)=-\frac{2}{1}$; $2\times (-2)+2\times(-2)+(-2) \times (-2)=\frac{-4}{1}$; $2\times (-2) \times (-2)=-\frac{-8}{1}$.

Всі рівності виконуються, тому формули Вієта є справедливими для даного многочлена.

Приклад 33. Скласти кубічний многочлен, який має корені 5, -2, 1 і коефіцієнт при старшому члені -2

Розв'язання: для кубічного многочлена за формулами Вієта маємо:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}$; $5+(-2)+1=-\frac{a_2}{-2}$; $a_2=8$,

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$; $5(-2)+5\times1+(-2) \times1=\frac{a_1}{-2}$;

$a_1=14$,

$x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}$; $5\times(-2)\times 1=-\frac{a_0}{-2}$; $a_0=-10$.

Отже, $a_3=-2$ $a_2=8$ $a_1=14$ $a_0=-10$. Звідси, кубічний многочлен має вигляд:

$-2x^3+8x^2+14x-10$.

Приклад 34. Скласти кубічний многочлен, який має корінь 3 кратності 2 і корінь (-1), а коефіцієнт при старшому члені 2

Розв'язання: корені кубічного многочлена: 3, 3, -1, а коефіцієнт при старшому члені 2. Тому аналогічно до розв'язування задачі 21 знаходимо $a_2=-10$, $a_1=6$, $a_0=18$ і за умовою $a_3=2$. Отже, кубічний многочлен має вигляд: $2x^3-10x^2+6x+18$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Алгебра 7-9.-К.: Освіта, 2000 - 303с.
2. Біляніна О.Я. Алгебра 8 клас / Кінащук Н.Л., Черевко І.М. – К.: Генеза, 2008.- 304 с.
3. Лобанова Л.В. Вибрані задачі елементарної математики /Фінкельштейн Л.П. -К.: Вища школа, 1989 – 96 с.
4. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу 10 клас. – Харків: Світ дитинства, 2008. – 448 с.
5. Пичурин А.Ф. За страницами учебника алгебры. -Москва.: Просвещение, 1990 -224с.
6. Рывкин А .А. Справочник по математике /Рывкин А.З., Хренов Л.С. -Москва.: Высшая школа, 1987 - 480 с.
7. У світі математики: збірник науково-популярних статей, випуск 13 [за редакцією М.Й.Ядренка]. –К.: Радянська школа, 1982. -256 с.
8. Шмаков І. П. Математика. Раціональні функції/ Андрощук Л. В. – К. 2002 - 36 с.

9. Курик О.М. Квадратні рівняння. Теорема Вієта //Математика. 2004. - №11. – С. 11-13.
10. Буруль К. Теорема Вієта //Математика. 2005. №7. – С.10-12.
11. Шепель Н. Теорема Вієта //Математика. 2006. №4. – С.9-11.